**Fibonacci Heap Project**

1. א. זמן הריצה האסימפטוטי הוא . תחילה, מתבצעות בדיוק פעולות של לערימה. לאחר מכן, מתבצעת פעולת , אשר במקרה זה מכיוון שישנם בערימה צמתים שכולם שורשים (דרגתם 0), נמחק את האיבר המינימלי (תמיד יהיה ) ואז נבצע לערימה. במהלך הפעולה נבצע פעולות (בסיבוכיות זמן של ), אשר יהפכו את הערימה להיות שורש יחיד מדרגה . כלומר סיבוכיות הפעולה היא .

לאחר מכן, נבצע על צמתים. נציין כי במקרה הספציפי הזה, כל פעולת תהיה , אבל בכל אופן ניתן לחסום פעולה זו במקרה הגרוע ביותר ב-, הוכחנו בתרגול מספר 9 כי אם נסמן ב-d את מספר פעולות הרצופות, נקבל כי *, ומכיוון ש-d הוא , נקבל שסך כל סיבוכיות הזמן של רצף פעולות ה- הוא .*

*כלומר קיבלנו סיבוכיות זמן כללית של סדרת הפעולות:*

ב.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Potential* | *totalCuts* | *totalLinks* | *Run-Time (ms)* | *m* |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

*ג. מספר פעולות ה- שיתבצעו הוא .* לאחר הההכנסות, ישנם בערימה צמתים שכולם שורשים (דרגתם 0). נמחק את האיבר המינימלי (תמיד יהיה ). לאחר המחיקה יהיו שורשים. מכיוון ש- הוא חזקה של 2, הפעולה בעצם תבצע את שורת הפעולות הבאות:

\* פעולות ליצירת שורשים מדרגה 1.

\* פעולות ליצירת שורשים מדרגה 2.

...

\* פעולות ליצירת שורש יחיד מדרגה .

כלומר סך כל פעולות ה- *שיתבצעו הוא:*

כלומר נבצע פעולות ,אשר יהפכו את הערימה להיות שורש יחיד מדרגה .

*מספר פעולות ה- שיבוצעו הוא בדיוק . זאת מכיוון שמתבצעות פעולות , ונשים לב שבכל פעולת מ- עד , מפחיתים מהמפתח ה- את הערך , כלומר ערכו החדש יהיה , מה שמבטיח לנו שהמפתח החדש שיווצר יהיה קטן מהאבא שלו, ולכן תתבצע פעולת . לכן מספר פעולות ה- שיבוצעו הוא* ***לפחות*** *. נשים לב כי לאחר שבוצעה פעולת , תתקבל ערימה בינומית מדרגה כאשר השורש יהיה והבנים הישירים שלו יהיו מפתחות מהקבוצה .*

*אם נתבונן בפעולת ה-, נבחין כי בכל פעם נכניס ל-"דלי" שמכיל תת עץ מדרגה 0 איבר לפי הסדר מ-0 עד . כלומר, עבור כל מספר זוגי שיכנס ל-"דלי" זה – הדלי יהיה ריק. לכן, כל מספר אי זוגי שנכניס ל-"דלי" יתחבר בתור הבן של המספר הזוגי שקודם לו. לכן, בכל פעולת בה יתחברו ערימות בדרגות גדולות מ-0, השורשים יהיו מספרים זוגיים. כלומר במצב הסופי, לכל מספר זוגי בעץ יהיה בדיוק בן אי זוגי אחד, מכיוון שבכל מלבד הראשון יתחבר אל המספר הזוגי בתור בן תת עץ ששורשו מספר זוגי אחר. נשים לב כי הוא מספר אי זוגי, ולכן האבא שלו הוא מספר זוגי, כלומר כל יתבצע לאבא שונה, ולכן לא נבצע יותר מפעולת אחת לכל , כלומר* ***לכל היותר*** *.*

*ערך הפוטנציאל יהיה . נשים לב כי מספר העצים שיתקבלו בסוף הפעולה יהיה כמספר פעולות ה- שבוצעו ועוד 1 שמייצג את הערימה שהייתה קיימת בתחילה. לכן מספר העצים יתרום לפוטנציאל . כמו כן, מספר ה- בסיום הפעולה יהיה כמספר פעולות ה- שבוצעו פחות 1, זאת מכיוון שה- הראשון יתבצע לבן ישיר של השורש, וכמובן השורש לא יכול להיות מסומן. מלבד ה- הראשון, כל פעולת תסמן בדיוק איבר אחד (והוכחנו שהאיברים שיסומנו יהיו שונים). לכן הפונטציאל הוא:*

*ד. מספר פעולות ה- שיתבצעו זהה לסעיף הקודם () מכיוון שפעולות אלו נגרמות משורה 2 בסדרת הפעולות שניתנה, ושורות 1,2 נשארו זהות לסעיף הקודם.*

*מספר פעולות ה- שיתבצעו יהיה 0. זאת כיוון שהאיבר הראשון שנבצע לו יהיה 0, ונהפוך את ערכו להיות , ולאחר מכן נבצע ל- שהוא הבן הישיר (נוכיח בהמשך) של 0, וגם את ערכו ננמיך במספר קבוע (), ובעצם ננמיך את הערך של שרוך של איברים החל מהאב הקדמון 0 עד לאיבר האחרון שהוא . מכיוון שבהתחלה איברים אלו קיימו את כלל הערימה, גם כאשר נחסר מכל אחד מהם מספר קבוע הם עדיין יקיימו את כלל הערימה. כלומר לכל איבר שננסה לבצע לו , ביצענו כבר על האב הישיר שלו (חוץ מ-0 שהוא מקרה פרטי), ולכן נוכל לבצע בביטחה על האיבר מבלי להפר את כלל הערימה, ומבלי לבצע פעולת . נוכיח בצורה פורמלית את הטענה.*

*טענת עזר: בערימה בינומית מדרגה כאשר נניח כי השורש הוא z , וכלל המפתחות בערימה נכנסו אחד אחרי השני בסדר עוקב עולה ב-1 החל מ- והלאה, הבנים של השורש יהיו מפתחות מהקבוצה , והבן הישיר יהיה . נוכיח באינדוקציה על . עבור , הטענה טריוויאלית. נניח נכונות עבור , ונוכיח עבור . תחילה, יתחברו האיברים הראשונים ליצירת ערימה בינומית מדרגה כאשר השורש הוא והבנים מהקבוצה . לאחר מכן, נמשיך להכניס עוד מספרים אשר יתחברו ליצירת ערימה בינומית מדרגה כאשר השורש הוא , ואז תתבצע פעולת ה- האחרונה שתיצור ערימה בינומית מדרגה כאשר השורש יהיה והבנים שלו יהיו מפתחות מהקבוצה , כאשר הבן הישיר יהיה .*

*נסמן ונוכיח באינדוקציה על מהלולאה בשורה 3, שעבור האיטרציה הבאה האיבר יהיה הבן הישיר של , שהוא האיבר מהאיטרציה הקודמת.*

*ראינו בסעיף הקודם כי לאחר פעולת ה- תיווצר ערימה בינומית בעלת שורש יחיד (0) מדרגה . לכן נוכל להשתמש בטענת העזר ולראות כי הבן הישיר שלו הוא*

*, והטענה מתקיימת עבור . נניח נכונות לכל ונוכיח עבור . האיבר ה- הוא הבן הישיר, לכן לפני שהתחבר מספר האיברים שהיו תחתיו הוא . לכן מטענת העזר נסמן , ולכן הבן הישיר הוא*

*.*

*מכיוון שלא תתבצע אף פעולת , מספר ה- לא ישתנה. בנוסף, ברור שמספר העצים גם לא ישתנה, ולכן הפוטנציאל:*

*ה. אם נמחק את שורה מספר 2, אז כלל לא יתבצע , כלומר לאחר ביצוע שורה 1, יהיו בערימה מהמפתחות החל מ- עד . לאחר מכן, נבצע ל- מפתחות, אך מכיוון שכל המפתחות שנבצע עליהם יהיו שורשים, פשוט נשנה את ערך המפתח שלהם ונעדכן את המצביע למינימום במידת הצורך. כלומר, לא יתבצעו בכלל פעולות , וכמובן לא יתבצעו כלל פעולות . כמו כן, מכך שלא יתבצעו פעולות , ברור שאף אחד מהצמתים לא יהיה מסומן, לכן הפונטציאל יושפע רק ממספר העצים בערימה. מספר העצים בערימה כמו שאמרנו הוא , כלומר הפונטציאל יהיה .*

*ו. מספר פעולות ה- שיתבצעו זהה לסעיף ג' () מכיוון שפעולות אלו נגרמות משורה 2 בסדרת הפעולות שניתנה, ושורות 1,2 נשארות זהות.*

*בסעיף ג' הוכחנו שכשנבצע על האיבר שגדול ב-1 מהאיבר , הוא יהיה בן של . כמו כן, אלו הם הבנים הישירים של ההורים שלהם (הוכח בסעיף ד'). כלומר, כשנסיים את הלולאה כל ה-"שרוך השמאלי" של הערימה יהיה מסומן, כאשר האיבר האחרון שלו הוא . כלומר כאשר נבצע ל-, האב הישיר שלו יהיה מסומן ולכן יתבצעו פעולות בעצם עד השורש. כלומר, מספר פעולות ה- שתתרום שורת קוד זו הוא . נציין שזאת תהיה פעולת ה- היקרה ביותר (כי כל הפעולות האחרות ביצעו פעולת יחידה). לכן סך כל פעולות ה- שבוצעו יהיה .*

*מבחינת הפוטנציאל, בסיום כל פעולות ה- אף איבר לא יהיה מסומן, כי כל איבר שהיה מסומן לפני הפעולה האחרונה נחתך לאחר ביצוע פעולת ה- האחרונה. כל מוסיף עץ לערימה, כלומר מספר העצים יהיה ,*

*ולכן הפוטנציאל יהיה:*

***טבלה לסיכום שאלה 1:***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Decrease max cost* | *Potential* | *totalCuts* | *totalLinks* | *Case* |
| X |  |  |  |  |
| X |  |  |  |  |
| X |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

*נשים לב כי ע"י התבוננות בטענת העזר, נבחין כי הבן הישיר (השמאלי ביותר) של 0 יהיה , נוכיח באינדוקציה שעבור האיטרציה ה-*

*ומטענת העזר הבן הישיר של יהיה.*

*נשים לב כי בכל איטרציה של שורה 3, יתבצע על המפתח ה-,*

*כלומר הסדר של המפתחות שנבצע עליהם יהיה 0, ואז , ואז , ובכללי באיטרציה ה- יתבצע לאיבר שמפתחו .*

*כלומר אם נסתכל על סדר פעולות ה- שיתבצעו, נשים לב שבין כל שני מפתחות שנבצע עליהם יהיו . כלומר עד ה-*

*נוכיח באינדוקציה שבכל איטרציה של הלולאה משורה 3, יבצע על הבן הישיר של האיבר שביצענו עליו באיטרציה הקודמת. באיטרציה הראשונה נבצע - לשורש (0). מקרה הבסיס: עבור האיטרציה השנייה, נבצע לצומת שערכה , ולפי טענת עזר – צומת זו היא אכן הבן הישיר של השורש. נניח נכונות עבור האיטרציה ה-,*

*זאת מכיוון שבפעולת ה- הראשונה נהפוך את השורש 0 להיות בעל ערך . לאחר מכן, נ*

*נשים נבצע פעולת , לאחר של מספר איברים בערימת פיבונאצי בעלת קפיצות של 1 בין מפתח למפתח הבא אחריו,*

*טענת עזר: נשים לב שכשאר נבצע פעולת , לאחר של מספר איברים בערימת פיבונאצי בעלת קפיצות של 1 בין מפתח למפתח הבא אחריו, תתקבל ערימה בינומית מדרגה כאשר השורש יהיה z (המפתח המינימלי שנשאר אחרי המחיקה) הבנים הישירים שלו יהיו מפתחות מהקבוצה . נוכיח באינדוקציה על . עבור , הטענה טריוויאלית. נניח נכונות עבור , ונוכיח עבור .*

*בעת פעולת ה- תחילה יתחברו האיברים הראשונים ליצירת ערימה בינומית מדרגה כאשר השורש הוא והבנים מהקבוצה . לאחר מכן, יוותרו שורשים מדרגה 0 אשר יתחברו ליצירת ערימה בינומית מדרגה כאשר השורש הוא , ואז תתבצע פעולת ה- האחרונה שתיצור ערימה בינומית מדרגה כאשר השורש יהיה והבנים הישירים שלו יהיו מפתחות מהקבוצה .*